

二次方程式

1 二次方程式とは

面積が5の正方形があります。このとき、1辺の長さを x とすると、 $x^2 = 5$ が成り立ちます。

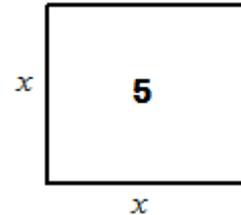
方程式 $x^2 = 5$ を「二次方程式」といい、 x は5の平方根なので、 $x = \pm\sqrt{5}$ です。

このとき、 $\pm\sqrt{5}$ を「二次方程式の解」といいます。

<二次方程式と解の例>

• $x^2 = 16, x = \pm 4$

• $x^2 = 18, x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$



2 二次方程式の基本的な解き方

(1) $ax^2 = b$ の形にしてから、 x を求めます。

• $3x^2 - 4 = 5$
 $3x^2 = 9$
 $x^2 = 3$
 $x = \pm\sqrt{3}$

• $3x^2 + 3 = 5$
 $3x^2 = 2$
 $x^2 = \frac{2}{3}$
 $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

• $6x^2 - 2 = 2x^2 + 1$
 $6x^2 - 2x^2 = 1 + 2$
 $4x^2 = 3$
 $x^2 = \frac{3}{4}$
 $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $(x+a)^2 = b$ の形にしてから、 x を求めます。

• $(x-2)^2 = 5$
 $x-2 = \pm\sqrt{5}$
 $x = 2 \pm\sqrt{5}$

• $x^2 + 6x + 9 = 4$
 $(x+3)^2 = 4$
 $x+3 = \pm 2$
 $x = -3 \pm 2 = -1, -5$

• $x^2 - 4x = 2$
 $x^2 - 4x + 4 = 2 + 4$
 $(x-2)^2 = 6$
 $x-2 = \pm\sqrt{6}$
 $x = 2 \pm\sqrt{6}$

3 因数分解を利用した解き方

二次方程式が、 $(x-a)(x-b)=0$ となるとき、 $x-a=0$ または $x-b=0$ なので、 $x=a, b$ です。

• $x^2+2x-15=0$ $(x+5)(x-3)=0$ $x=-5, 3$	• $2x^2-3x=0$ $2x(x-\frac{3}{2})=0$ $x=0, \frac{3}{2}$	• $3x^2-2x+1=2x^2+x+5$ $x^2-3x-4=0$ $(x+1)(x-4)=0$ $x=-1, 4$
--	--	---

4 解の公式を利用した解き方

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であることを利用します。

この公式を「**解の公式**」といいます。

• $x^2+5x+3=0$ $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times 3}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$	• $3x^2-2x-4=0$ $x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 3\times (-4)}}{2\times 3}$ $=\frac{2\pm\sqrt{52}}{6}=\frac{2\pm 2\sqrt{13}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$
--	---

5 二次方程式の解と係数の関係

二次方程式 $(x-a)(x-b)=0$ の解は、 $x=a, b$ であることから、

$x^2-(a+b)x+ab=0$ で、 x の係数は $-(a+b)$ ，定数の項は ab となる。

- $x^2+x+1=0$ の解を a, b とすると、 $a+b=-1$ ， $ab=1$ となる。
- $x^2+2x+3=0$ の解を a, b とすると、 a^2+ab+b^2 の値を求める場合、 a, b を求めなくても $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(-2)^2-3=1$ と求めることができる。